Block I Funktionsbegriffe

Definitionsbereich Nullstellen, Asymptoten

Beispiel 1

$$f(x) = \frac{3x + 5}{2X - 1}$$

Definitionsbereich:

Nullstellen:

Senkrechte Asymptote:

Waagerechte Asymptote:

Beispiel 2

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + x - 6}$$

Definitionsbereich:

Nullstellen:

Senkrechte Asymptote:

Waagerechte Asymptote:

Beispiel 3

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$$

Definitionsbereich:

Nullstellen:

Senkrechte Asymptote:

Waagerechte Asymptote:

Parameter

Betrachtet wird die gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{ax^2+3x+2}{2x^2-1}$

Bestimmen Sie (unabhängig voneinander, d.h. für jede der folgenden Bedingungen einzeln) den Wert des Parameters a so, dass
a) der Graph von f durch den Punkt P(4/2) geht
b) die Funktion f an der Stelle x=2 eine Nullstelle besitzt
c) die horizontale Asymptote von f die Gleichung y=3 hat.

Lineare Funktionen

Eiskönig

In ihrem Ferienurlaub in Deutschland, trifft Urs bei der Gelateria *Eiskönig* auf zwei interessante Angebote. Da er in einer Gruppe unterwegs ist, schaut er sich die Angebote genauer an.

Offerte 1: Glace-Abo zu von 30 € inklusive 4 Kugeln. Jede weitere Kugel kostet 2.50 €.
Offerte 2: Jede Kugel Glace kostet 5.50 €.

a) Um sich das ganze besser vorstellen zu können, bittet dich Urs, ihr die Funktionsgleichungen von beiden Offerten aufzustellen.

b) Wie viele Kugeln Glace muss Urs bestellen, damit sich die *Offerte 1* lohnt?
(In der Gelateria können auch halbe/viertel/zehntel etc. Kugeln gekauft werden!)

Gleichgewichtspreis

Franz Bauer und interessiert sich für Betriebsökonomie. Ihm sind über ein bestimmtes Gut folgende Zusammenhänge bekannt:

- Bei einem Preis von 13 GE/ME wird eine Menge von 4 ME nachgefragt.
- Die nachgefragte Menge beträgt 12 ME, wenn der Preis 3 GE/ME beträgt.
- Das Angebot bei einem Preis von 3 GE/ME liegt bei 4 ME.
- Beträgt der Preis 15 GE/ME, wird eine Menge von 28 ME angeboten.

Zudem weiss Franz, dass sich die Angebots- bzw. Nachfragefunktionen linear verhalten.

Franz bittet dich nun, den Gleichgewichtspreis bzw. –menge zu berechnen.

Parkettlieferant

Für seine eigene Wohnung möchte Urs Parkettboden bestellen. Von einer Kollegin weiss er, dass 120 m^2 bei Lieferant X CHF 4‘760.00 kostet. Ein anderer Kollege hat für seine Büroräumlichkeiten beim selben Lieferant Parkett für eine Gesamtfläche von 650 m^2 bestellt, seine Rechnung belief sich auf CHF 23‘575.00. Von den beiden Kollegen weiss Urs, dass der Lieferant für den Transport, administrative Aufgaben etc. einen Grundtarif erhebt, der bei jeder Bestellung gleich hoch ist. Zusätzlich erfährt er auf der Firmenhomepage, dass der Lieferant seine Preise linear berechnet.

a) Urs bittet sie, die Preise in einer Funktion darzustellen.

b) Wie hoch ist der in der Aufgabenstellung erwähnte Grundtarif? Wie hoch der Preis pro m^2?

Zinseszins

Urs legt sein Geld bei der Bank *DAN* an. Der bei der Bank hinterlegte Betrag beläuft sich auf CHF 4‘726.08. Die Bank verspricht einen Zinssatz von 6 %.

a) Wie lange müsste Urs sparen, um ein Vermögen von CHF 500‘000.00 auf seinem Konto zu haben?

b) Das geht Urs dann doch zu lange. Er überlegt sich, dass er schon in 30 Jahren die CHF 500‘000.00 haben möchte. Wie viel Geld muss er dazu heute auf der Bank deponieren?

c) So viel Geld hat Urs nicht und tritt mit seinem Bankverwalter in Verhandlungen ein. Er möchte heute CHF 50‘000.00 auf dem Konto deponieren und in 25 Jahren diesen Betrag verzehnfachen. Wie hoch muss der Zins sein, der Urs verhandelt, damit er sein optimistisches Ziel erreicht?

Minimum / Maximum

Wien

Urs hat vor einiger Zeit Wein in Italien gekauft. Bis jetzt dachte er, je länger er diesen lagert, desto besser wird dieser. Ein bekannter Somalier und Freund von Urs hat ihn jedoch auf die untenstehende Formel hingewiesen, welche den Wert W (in CHF) des Weines in Abhängigkeit der Lagerdauer t (in Jahren) darstellt.

$$W(t) = -0.5t^3 + 4t^2 + 10$$

Wie lange sollte Urs den Wein lagern, um den höchsten Wert zu erzielen?

Exponentialgleichungen

a) $3^{\mathrm{x}} = 2$

b) $7^{3\mathrm{x}} = 3 * 2^{4\mathrm{x}-1}$

Umkehrfunktion

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion:

a) $y(x) = x^3 - 1$

b) $y(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $x(u) = e^{u-1}$

d) $y(x) = \sqrt{5x}$

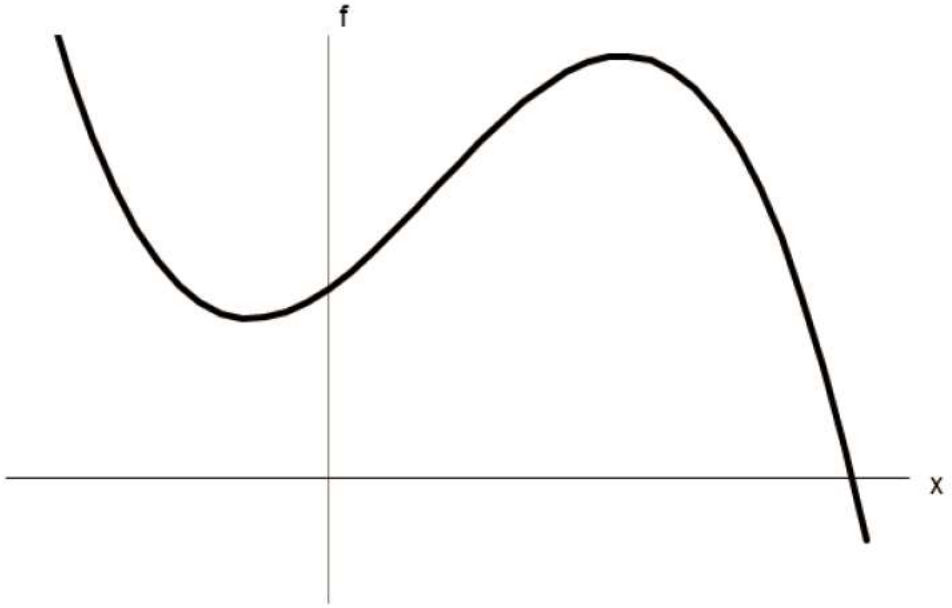
e) $x(y) = \frac{\log_7(y)}{5}$

f) $x(p) = 10 * 2^{0.5p}$

g) $x(p) = 5 * \ln(2p + 1)$

Block II Technik des Differenzierens

Grafisches Ableiten



Ableiten

Leiten Sie folgende Funktionen auf x ab.

a) $f(x) = x^5$

b)$f(x) = \frac{1}{x}$

c)$f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{3x^7}{2}$

e) $f(x) = -6 * x^{-3}$

f) $f(x) = x^2 * (x - 1)$

g) $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

h) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

i) $f(x) = (x^3 + 1)^2$

Block III Untersuchung von Funktionen mit Hilfe des Differenzierens

Grenzfunktionen

Aufgabe 1 – ertragsgesetzliche Produktionsfunktion

Gegeben sei die ertragsgesetzliche Produktionsfunktion x mit:

$x(r) = -r^3 + 12r^2 + 30r$ x: Output in ME_x, r: Input in ME.

Man ermittle mit Hilfe des Differentials dx näherungsweise die Outputänderung, wenn – ausgehend von einer Inputmenge von 7 ME – diese Inputmenge um 0.25 ME gesteigert wird.

Aufgabe 2 – Durchschnittsgrenzkosten

Die Durchschnittskosten k (in GE/ME) bei der Produktion eines Gutes sind gegeben durch:

$k(x) = 0.2x^2 - 4x + 60 - \frac{200}{x}$ (produzierte Menge x in ME, x > 0).

Im Moment werden 20 ME produziert. Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des Differentials dk, welche Veränderung bei den Durchschnittskosten zu erwarten ist, wenn die produzierte Menge um 0.6 ME gesenkt wird.

Aufgabe 3 – Konsumfunktion

Gegeben ist die Konsumfunktion

$C(Y) = 6 \cdot \frac{Y+1}{Y+5}$ Y und C in Tausend CHF; $Y \geq 0$

Die Ableitung $C'(Y)$ der Konsumfunktion könnte man als den Grenzkonsum bezeichnen; gebräuchlicher sind aber die Begriffe marginale Konsumquote oder Grenzneigung zum Konsum.

a) Bestimmen Sie die marginale Konsumquote allgemein und speziell für $Y = 5$. Interpretieren Sie $C'(5)$.

b) Die zugehörige Sparfunktion ist definiert als $S(Y)=Y-C(Y)$. Bestimmen Sie die marginale Sparquote $S'(Y)$ allgemein und speziell für $Y = 5$.

c) Berechnen Sie das minimale Einkommen, ab dem von einem zusätzlich generierten Einkommen nur noch maximal 10% in den Konsum fliessen würden.

Monotonie

Aufgabe1

Überprüfe, ob alle Kostenfunktionen streng monoton wachsen und entscheide, ob es sich dabei um degressives oder progressives Wachstum handelt

a.) $K(x) = 1.25x + 8$

b.) $K(x) = 0.25x^2 + x + 8$

c.) $K(x) = -0.025 \cdot (x - 20)^2 + 17$

d.) $K(x) = x^3 - 12x^2 + 68x + 50$

Krümmung

Aufgabe 1

In welchen Intervallen sind die durch folgende Funktionsgleichungen definierten Funktionen konvex (bzw. konkav)?

a.) $K(x) = x^3 - 2x^2 + 60x + 100$

b.) $x(r) = -r^3 + 6r^2 + 15r$

c.) $p(y) = \frac{y^2-1}{y}$

d.) $y(K) = 0.4 \cdot K^{0.6}$

Extremwerte

Aufgabe 1

Ermittle Lage und Typ der relativen Extrema folgender Funktionen:

a. $k(t) = 12 - 12t + t^3$

b. $h(y) = y(y-2)^5$

Block IV Matrizen und Lineare Gleichungssysteme

Matrizen

Aufgabe 1

Schreiben Sie die folgenden Gleichungssysteme in Matrizenform und lösen Sie sie mit dem Taschenrechner:

a) $$\left| \begin{array}{rl} x + 4y - 5z & = 21 \\ 2x + 3y + 4z & = -1 \\ x - 6y - 8z & = -3 \end{array} \right|$$

b) $$\left| \begin{array}{l} x_1 = x_3 - 3x_4 + 5 \\ x_2 = 3x_1 - 2(x_3 - 2x_4) \\ x_3 = -2x_1 + 3x_2 - 5x_4 \\ x_4 = -7x_3 + 2(x_2 - 3) \end{array} \right|$$

Lineares Gleichungssystem

Aufgabe 1

Eine ertragsgesetzliche Gesamtkostenfunktion soll durch eine Polynomfunktion 3. Grades

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

beschrieben werden.

Über die Gesamtkosten ist folgendes bekannt:

(1) Die Fixkosten betragen 16 GE
(2) Die Gesamtkosten bei der Produktion von 1 ME betragen 38 GE
(3) Die Gesamtkosten bei der Produktion von 4 ME betragen 56 GE
(4) Die Grenzkosten bei der Produktion von 1 ME betragen 15 GE/ME

Wie heisst die Funktionsgleichung von K?