Aufgabe 1

a) Zinseszins-Formel $K_n = K_0 * (1+i)^n$ nach n auflösen: $n = \frac{\log(\frac{K_n}{K_0})}{\log(1+i)}$

K_n (Kapital nach n Jahren) = 500‘000
K_0 (Anfangskapital) = 4‘726.08
i (Zins) = 0.06

$$n = \frac{\log(\frac{500000}{4726.08})}{\log(1+0.06)} = 79.999 \approx \mathbf{80\ \mathit{Jahre}}$$

b) Zinseszins-Formel $K_n = K_0 * (1+i)^n$ nach K_0 auflösen: $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$

$$K_0 = \frac{500000}{(1.06)^{30}} = \mathbf{87'055.07\ \mathit{CHF}}$$

c) Zinseszins-Formel $K_n = K_0 * (1+i)^n$ nach i auflösen: $i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$

$$i = \sqrt[25]{\frac{500000}{50000}} - 1 = 0.0965 \approx \mathbf{9.7}\ \%$$

Aufgabe 2

a) Offerta 1: $K_1(x) = \begin{cases} 30 & (0 \le x \le 4) \\ 20 + 2.5x & (x > 4) \end{cases}$

Erläuterung zur unteren Zeile: Die 30€ müssen sowieso bezahlt werden. Dazu kommen 2.50 € pro zusätzliche Kugel, die ersten 4 Kugeln können aber abgezogen werden, also:
$30 + (x-4) * 2.5$, was ausmultipliziert $20 + 2.5x$ ergibt.

Offerta 2: $K_2(x) = 5.5x$

b) Dazu müssen grafisch der Schnittpunkt der beiden Gleichungen ermittelt werden. Der einfachste Weg dazu: Die beiden Gleichungen werden gleichgesetzt:

$20 + 2.5x = 5.5x \Rightarrow x = 6\ ^2/_3$

Marion muss also mindestens 6 2/3 Kugeln bestellen, damit sich das Angebot lohnt.

Aufgabe 3

a) Zuerst die Steigung a der linearen Funktionsgleichung ($y = a * x + b$) berechnen:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{23575 - 4760}{650 - 120} = \frac{18815}{530} = 35.5$$

Jetzt einer der beiden Punkte einsetzten und nach b auflösen:

$$4760 = 35.5 * 120 + b \;\Rightarrow\; b = 500$$

Die Funktionsgleichung lautet also:

$$p(x) = 35.5x + 500$$

Schneller kann die Lösung mittels dem TR und dem PRGM GERADE errechnet werden

b) Der Grundtarif ist derjenige Preis, der bei einer theoretischen Bestellmenge von 0 trotzdem bezahlt werden muss, also der y-Achsenabschnitt. Gemäss vorher berechneter Gleichung ist dies der Wert für die Variabel b, also CHF 500.00.

Der Preis pro m^2 ist in der Funktionsgleichung die Steigung a, also CHF 35.50.

Aufgabe 4

a) $f(x) = \sqrt{5x}$

$$x(f) = \frac{f^2}{5} \; bzw. \; x(f) = 0.2f^2$$

b) $x(u) = e^{u-1}$

Mittels Definition natürlichem Logarithmus umformen: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

Also:

$$x = e^{u-1} \Leftrightarrow u - 1 = \ln x$$

$$u(x) = \ln x + 1$$

c) $f(x) = \ln(x)$

Selbe Regel wie unter b) anwenden, einfach verdreht:

$$f(x) = \ln x \Leftrightarrow x(f) = e^f$$

d) $f(y) = \frac{\log_7 y}{5}$

$$y = a^x \Leftrightarrow \mathrm{x} = \log_a y$$

Also:
$5 * f = \log_7 y \Leftrightarrow y = 7^{5f}$

e) $m(w) = \frac{30w+5}{w+1}$

$$
\begin{aligned}
m(w) &= \frac{30w+5}{w+1} && | * (w+1) \\
m * (w+1) &= 30w + 5 && | \, ausmultiplizieren \\
mw + m &= 30w + 5 && | - mw; \; -5 \\
m - 5 &= 30w - mw && | \, w \; ausklammern \\
m - 5 &= w * (30 - m) && | : (30 - m)
\end{aligned}
$$

$$w(m) = \frac{m-5}{30-m} \; bzw. \quad w(m) = \frac{5-m}{m-30}$$

Aufgabe 5

a) Es handelt sich um ein Polynom 2ten Grades. Ein Polynom hat immer maximal (aber nicht zwingend) so viele Nullstellen wie der Grad. In diesem Beispiel also maximal 2 Nullstellen.

b) Vertikale / senkrechte Asymptote ist dort, wo der Nenner = 0 ist.
$x^2 - 8x + 15 = 0 \xRightarrow{Quadgl} x_1 = 3; \; x_2 = 5$; an diesen Stellen hat die Funktion also senkrechte Asymptoten.

Horizontale Asymptote = x-Achse, wenn Zähler-Grad kleiner ist als Nenner-Grad. Hier erfüllt, also ist x-Achse (bzw. y=0) eine horizontale Asymptote.

c) Da die x-Achse eine horizontale Asymptote ist, wird die Funktion keine Werte für den Wert y=0 einnehmen. Deshalb hat die Funktion f(x) keine Nullstellen.

Aufgabe 6

Entweder den Graph auf dem TR zeichnen und mittels 2nd -> calc -> 4: maximum den Punk berechnen.

Oder mittels 1. Ableitung = 0 setzten.

$$W'(t) = -1.5t^2 + 8t = 0 \xRightarrow{Quadgl} x_1 = 0; \; x_2 = 5.3333$$

Werte mittels 2. Ableitung überprüfen.
$W''(t) = -3t + 8$
$W''(0) = 5 > 0 \rightarrow Minimum$
$W''(5.333) = -7.999 \rightarrow Maximum$

Marion sollte den Wein also 5.333 Jahre lagern, um den höchsten Wert des Weines zu erreichen.

Aufgabe 7

Zuerst der Preis der Nachfrage in Abhängigkeit der Menge: $p_n(x) = ax + b$
Die vorgegebenen Punkte der Nachfrage betragen:

$p_1 = 13;\ x_1 = 4\ sowie\ p_2 = 3;\ x_2 = 12$

Steigung a berechnen:
$$a = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{3 - 13}{12 - 4} = \frac{-10}{8} = -1.25$$

Jetzt entweder P_1 oder P_2 in die Funktion einsetzten und nach b auflösen:
$$p_n(x) = ax + b \xRightarrow{P_1\ einsetzten} 13 = -1.25 * 4 + b \xRightarrow{auflösen} b = 18$$

$$p_n(x) = -1.25x + 18$$

Danach der Preis des Angebots in Abhängigkeit der Menge: $p_a(x) = ax + b$
Die vorgegebenen Punkte des Angebots betragen:

$p_1 = 3;\ x_1 = 4\ sowie\ p_2 = 15;\ x_2 = 28$

Steigung a berechnen:
$$a = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{15 - 3}{28 - 4} = \frac{12}{24} = 0.5$$

Jetzt entweder P_1 oder P_2 in die Funktion einsetzten und nach b auflösen:
$$p_a(x) = ax + b \xRightarrow{P_1\ einsetzten} 3 = 0.5 * 4 + b \xRightarrow{auflösen} b = 1$$

$$p_a(x) = 0.5x + 1$$

Um das Gleichgewicht zu berechnen werden nun p_n und p_a gleichgesetzt:
$$p_a(x) = p_n(x) \Rightarrow\ 0.5x + 1 = -1.25x + 18 \xRightarrow{auflösen} x = 9.7143 \cong 9.7$$

$$p_n(9.7) = 5.875 \cong 5.9$$

Das Gleichgewicht befindet sich also bei einem Preis von 5.9 GE/ME und einer Menge von 9.7 ME.

Aufgabe 8

Aus dem Graph ist ersichtlich, dass sich am Punkt C=7 eine horizontale Asymptote befindet.
Daraus abgeleitet: $a = 7$

Für Y=0.5 hat der Graph eine senkrechte Asymptote. Heisst also, dass am Punkt Y=0.5 der Nenner eine Nullstelle besitzt:
$Nenner = 0 \xRightarrow{Y=0.5} 0.5 + c = 0 \xRightarrow{auflösen} c = -0.5$

Dass bei einem Einkommen von 1.5 nichts konsumiert wird, bedeutet folgendes: $Y_1 = 1.5\ C_1 = 0$

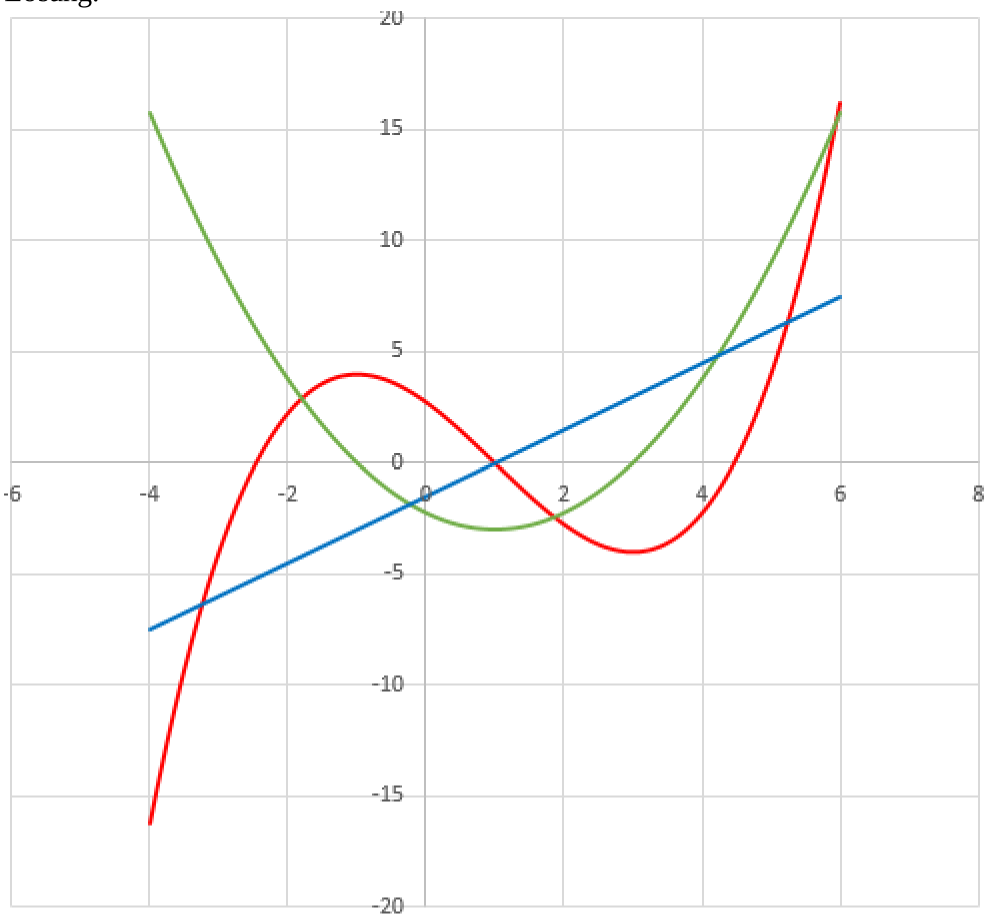
Erstellt man nun die Funktionsgleichung (Form: $C(Y) = \frac{a*Y+b}{Y+c}$) mit allen bisherigen Informationen sieht dies so aus:

$$0 = \frac{7 * 1.5 + b}{Y - 0.5} \xRightarrow{nach\ b\ auflösen} b = -9.5$$

Funktionsgleichung:
$$C(Y) = \frac{7Y - 9.5}{Y - 0.5}$$

Aufgabe 9

Lösung:



Aufgabe 10

a) Nullstellen bei $f(x) = 0$, also bei $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 0$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0 \xRightarrow{Quadgl} x_1 \cong 0.549,\ \ x_2 \cong -1.215$

$$f''(x) = 6x + 2 \xRightarrow{x1\ bzw. einsetzten} \begin{array}{l} f''(0.549) = 5.294 > 0 \rightarrow Maximum \\ f''(-1.215) = -7.29 < 0 \rightarrow Minimum \end{array}$$

$Die\ Funktion\ hat\ zwei\ Extremwerte. Ein\ Maximum\ an\ der\ Stelle$
$x_1 = 0.549\ und\ ein\ Minimum\ an\ der\ Stelle\ x_2 = -1.215$

c) $f''(x) = 6x + 2 = 0 \xRightarrow{auflösen} x_0 = -\frac{1}{3}; f'''(x) = 6 > 0 \rightarrow Konkav/konvex$
$f(x)\ hat\ einen\ konkav\ konvexen\ Wendepunkt\ an\ der\ Stelle\ x = -\frac{1}{3}$

d) $f''(x)\begin{cases} x < -\frac{1}{3} & konkav \\ x > -\frac{1}{3} & konvex \end{cases}$

Aufgabe 11

Aus der Information Fixkosten = 999 GE ergibt sich, dass d=999 sein muss.

I. $K(10) = 3789 \rightarrow 1000a + 100b + 10c + 999 = 3789$
$\mathbf{1000a + 100b + 10c = 2790}$

II. $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x} = ax^2 + bx + c$
$k_v(5) = 166.5 \rightarrow \mathbf{25a + 5b + c = 166.5}$

III. $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$K'(5) = 256.5 \rightarrow 3 * a * 25 + 2 * b * 5 + c = 256.5$
$\mathbf{75a + 10b + c = 256.6}$

$Gleichungssystem\ erstellen\ und\ in\ Matrizenform\ bringen$:

$$\begin{pmatrix} 1000 & 100 & 10 \\ 25 & 5 & 1 \\ 75 & 10 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 2790 \\ 166.5 \\ 256.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.896 \\ 9.06 \\ 98.8 \end{pmatrix}$$

$K(x) = 0.896x^3 + 9.06x^2 + 98.8x + 999$

Aufgabe 12

Lösungen:

a) f'(x)= $25x^4$

b) f'(x) = $-21x^2 - 8x$

c) f'(x) = $12x^3 - 2x + 4 + \frac{10}{x^6}$

d) f'(x) = $(6x^2 - 10x)(2x^4 - 4x) + (2x^3 - 5x^2)(8x^3 - 4)$

e) f'(x) = $392x^6$

f) f'(x) = $\frac{-1}{(x-1)^2}$

g) f'(x) = $\frac{-2x \cdot (3 + x^2) - (3 - x^2) \cdot 2x}{(3 + x^2)^2}$

h) f'(x) = $\frac{6x^2 - (6x + 6) \cdot 2x}{x^4}$

i) f'(x) = $\frac{5}{2\sqrt{5x - 9}}$

j) f'(x) = 2x

k) f'(x) = $\frac{4 + 4x}{2\sqrt{4x + 2x^2}}$

l) f'(x) = $\frac{24x^2}{2\sqrt{8x^3}}$

m) f'(x) = $\frac{[(\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}})(3x^3 + x^2) - (x\sqrt{x^2 - 1} \cdot (9x^2 + 2x))]}{(3x^3 + x^2)^2}$

n) f'(x) = $\frac{3}{3x + 1}$

o) f'(x) = $\ln(x) \cdot e^x + \frac{e^x}{x}$

p) f'(x) = $\frac{44}{x \cdot \ln(10)}$

q) f'(x) = $8 \cdot e^{8x+2}$

r) f'(x) = $5 \cdot \ln(5) \cdot 5^{5x}$